Kapitel IX
Über Differentialgleichungen *

Leonhard Euler

§281 In diesem Kapitel ist das Haptanliegen, die Differentiation von Funktionen von x, die nicht explizit, sondern implizit durch eine Gleichung, in welcher die Relation dieser Funktion y zu x enthalten ist, definiert werden, zu erklären, danach werden wir die Natur von Differentialgleichungen im Allgemeinen gründlich betrachten und zeigen, wie sie aus endlichen Gleichungen entspringen. Weil nämlich im Integralkalkül die größte Aufgabe in der Integration von Differentialgleichungen oder im Finden von endlichen Gleichungen solcher Art besteht, die mit den Differentialen übereinstimmen, ist es notwendig, dass wir an dieser Stelle die natürliche Beschaffenheit und die Eigenschaften von Differentialgleichungen, die aus deren Ursprung folgen, sorgfältiger untersuchen und so den Weg zum Integralkalkül bereiten.

§282 Um also diese Aufgabe zu bewältigen, sei y eine Funktion solcher Art von x, die durch diese quadratische Gleichung

$$yy + Py + Q = 0$$

bestimmt werde. Weil also dieser Ausdruck $yy + Py + Q = 0$ ist, was auch immer x bedeutet, wird er auch gleich Null sein, wenn anstelle von x $x + dx$ geschrieben wird, in welchem Fall y in $y + dy$ übergeht. Wenn aber nach dieser

*Originaltitel: "De aequationibus differentialibus", erstmals publiziert im Jahre 1755", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 10, pp 187-213", Eneström-Nummer E212, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes "Euler-Kreis Mainz"

Substitution von der resultierenden Größe die erste $yy + Py + Q$ subtrahiert wird, wird ihr Differential zurückbleiben, was deshalb auch $= 0$ sein wird. Daher tritt es klar zutage, wenn irgendein Ausdruck $= 0$ war, dass auch sein Differential gleich 0 sein wird, und wenn irgendwelche zwei Ausdrücke einander gleich waren, dass auch deren Differentiale gleich sein werden. Weil also $yy + Py + Q = 0$ ist, wird auch sein

$$2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0;$$

weil aber P und Q Funktionen von x sind, werden deren Differentiale eine Form von dieser Art haben

$$dP = pdx \text{ und } dQ = qdx;$$

daher wird werden

$$2ydy + Pdy + ypdx + qdx = 0;$$

aus dieser entspringt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{yp + q}{2y + P.}$$

§283 Wie also die endliche Größe $yy + Py + Q = 0$ die Relation zwischen y und x darstellt, so drückt die Differentialgleichung die Relation oder das Verhältnis aus, das dy zu dx hat. Weil aber $\frac{dy}{dx} = -\frac{yp+q}{2y+P}$ ist, kann dieses Verhältnis $dy : dx$ nicht erkannt werden, wenn nicht die Funktion y selbst bekannt ist; und in der Tat kann sich diese Sache auch nicht anders verhalten, weil nämlich aus der endlichen Gleichung y zwei Werte erhält, wird jeder der beiden sein eigenes Differential haben und das Differential jeder der beiden wird aufgefunden werden, je nachdem ob dieser oder jener Wert im Ausdruck $-\frac{yp+q}{2y+P}$ anstelle von y eingesetzt wird. Auf die gleiche Weise werde die Funktion y durch eine kubische Gleichung definiert; der Wert der Funktion $\frac{dy}{dx}$ wird ein dreifacher sein, natürlich dem dreifachen Wert von y entsprechend. Wenn in der vorgelegten endlichen Gleichung y vier oder mehr Dimensionen hat, ist es notwendig, dass $\frac{dy}{dx}$ eben so viele Bedeutungen erhält.

§284 Dennoch wird indes die Funktion y selbst aus der Gleichung eliminiert werden können; weil man zwei y enthaltende Gleichungen hat, natürlich die endliche und die differentiale; dann wird aber ihr Differential dy zu ebenso vielen Dimensionen ansteigen, wie zuvor y gehabt hatte und so wird diese Gleichung alle verschiedenen Verhältnisse von dy zu dx zugleich umfassen. Wir wollen das vorhergehende Beispiel der Gleichung $yy + Py + Q = 0$ nehmen, deren Differentialgleichung $2ydy + Pdy + ydP + dQ = 0$ ist, welche wird

$$y = -\frac{Pdy + dQ}{2dy + dP},$$

welcher Wert anstelle von y in der ersten Gleichung eingesetzt geben wird

$$(4Q - PP)\, dy^2 + (4Q.PP)\, dPdy + Qdp^2 - PdPdQ + dQ^2 = 0$$

deren Wurzeln sind

$$dy = -\frac{1}{2}dP \pm \frac{\frac{1}{2}PdP - dQ}{\sqrt{pp - 4Q}},$$

welche die zwei Differentiale der zwei Werte von y aus der endlichen Gleichung sind

$$y = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{PP - 4Q}.$$

§285 Nachdem aber Wert von dy gefunden worden ist, wird durch wiederholte Differentiation der Wert von ddy und weiter der von d^3y, d^4y etc. aufgefunden werden. Weil dieses aber nicht bestimmt ist, wenn nicht irgendein erstes Differential als konstant festgelegt wird, wollen wir zur Bequemlichkeit also dx konstant festlegen und um dies zu zeigen, wollen wir dieses Beispiel nehmen.

$$y^3 + x^3 = 3axy,$$

woher durch Differentiation entspringt

$$3yydy + 3xxdx = 3axdy + 3aydx$$

und daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax};$$

es werden erneut die Differentiale für konstant festgelegtes dx genommen und es wird aufgefunden werden

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{-ayydy - aaxdy + 2xxydy - 2xyydx + aaydx + axxdx}{(yy - dx)^2};$$

es werde anstelle von dy sein gerade gefundener Wert $\frac{aydx-xxdx}{yy-ax}$ eingesetzt und nach Division durch dx wird man haben

$$\frac{ddy}{dx^2}=\frac{(ay-xx)\,(2xxy-ayy-aax)}{(yy-ax)^3}+\frac{axx+aay-2xyy}{(yy-ax)^2}$$

oder

$$\frac{ddy}{dx^2}=\frac{6axxyy-2x^4y-2xy^4-2a^3xy}{(yy-ax)^3}=-\frac{2a^3y}{(yy-ax)^3},$$

weil aus der endlichen Gleichung $2x^4y+2xy^4=6axxyy$ ist; und auf diese Weise können mit Hilfe der endlichen Gleichung diese Werte in unzählige Formen verwandelt werden.

§286 Auch die erste Differentialgleichung kann auf unendlich viele Arten variiert werden, indem sie mit der ersten Differentialgleichung vermischt wird. So, nachdem im vorhergehenden Beispiel diese Differentialgleichung gefunden worden war

$$yydy+xxdx=axdy+aydx,$$

wenn sie mit y multipliziert wird, wird entspringen

$$y^3dy+xxydy=axydy+ayydx;$$

wenn in dieser anstelle von y^3 sein Wert $3axy-x^3$ eingesetzt wird, wird diese neue Gleichung entspringen

$$2axydy-x^3dy+xxydx=ayydx;$$

diese wird erneut mit y multipliziert, nachdem anstelle von y^3 sein Wert eingesetzt worden ist, liefern

$$2axy^2dy-x^3ydy+xxyydx=3aaxydx-a^2x^3dx.$$

Allgemein aber, wenn P, Q, R irgendwelche Funktionen von x und y bezeichnen, wenn die Differentialgleichung mit P multipliziert wird, wird sein

$$Pyydy+Pxxdy=aPxdy+aPydx.$$

Dann, weil $x^3+y^3-3axy=0$ ist, wird auch sein

$$\left(x^3+y^3-3axy\right)(Qdx+Rdy)=0;$$

diese Ausdrücke werden zueinander addiert eine allgemeine aus der vorgelegten endlichen Gleichungen entstandene Differentialgleichung geben

$$Pyydy - aPxdy + Rx^3dy + Ry^3dy - 3aRxydy$$
$$+Pxxdx - aPydx + Qx^3dx + Qy^3dx - 3aQxydx = 0$$

§287 Es können in der Tat auch durch Differentiation selbst unendlich viele Differentialgleichungen aus derselben endlichen Gleichung gefunden werden; indem sie, bevor sei differenziert wird, mit irgendeiner Größe entweder multipliziert wird oder durch sie geteilt wird. So, wenn P irgendeine Funktion von x und y war, dass $dP = pdx + qdy$ ist, wenn die endliche Gleichung mit P multipliziert wird und dann erst differenziert wird, wird eine allgemeine Differentialgleichung erhalten werden, die unendlich viele verschiedene Formen annehmen wird, je nachdem ob für P die einen oder die anderen Funktionen angenommen werden. Dann wird aber die Vielfältigkeit noch ins Unendliche vermehrt werden, wenn zu dieser gefundenen Differentialgleichung eine endliche mit einer Formel von dieser Art $Qdx + Rdy$ multiplizierte Gleichung hinzu addiert wird, wo sich für Q und R irgendwelche Funktionen von x und y annehmen lassen. Obwohl aber in all diesen Gleichungen die Relation zwischen dy und dx, die das Differential der durch eine endliche Gleichung durch x bestimmten Funktion y zu dx hat, erfasst wird, erstrecken sie sich dennoch oft um vieles weiter und drücken das Differential von y durch andere endliche Gleichungen bestimmt aus; der Grund für diese Sache wird hauptsächlich im Integralkalkül erklärt werden.

§288 Nicht nur aber können aus derselben endlichen Gleichung unzählige Differentialgleichungen abgeleitet werden, sondern es können auch mehrere, sogar unendlich viele Gleichungen dargeboten werden, die zu denselben Differentialgleichungen führen. So sind diese zwei Gleichungen

$$yy = ax + ab \text{ und } yy = ax$$

ganz und gar verschieden, während in der ersten irgendeine konstante Größe an die Stelle von b gestellt wird. Dennoch geht diese beiden Gleichungen differenziert dieselbe Differentialgleichung

$$2ydy = adx;$$

ja sogar alle in dieser Form $yy = ax$ enthaltenen Gleichungen, welcher Wert auch immer a zugeteilt wird, können in einer einzigen Differentialgleichung, in welcher a nicht enthalten ist, erfasst werden, Es werde nämlich jene Gleichung durch x geteilt, dass $\frac{yy}{x} = a$ ist, und diese wird differenziert geben

$$2xdy - ydx = 0$$

Es können auch transzendente und algebraische Gleichungen auf dieselbe Differentialgleichung geführt werden, wie es bei diesen Gleichungen geschieht

$$yy - ax = 0 \text{ und } yy - ax = bbe^{\frac{x}{a}};$$

wenn nämlich jede der beiden durch $e^{\frac{x}{a}}$ geteilt wird, dass man diese Gleichungen hat

$$e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = 0 \text{ und } e^{-\frac{x}{a}}(yy - ax) = bb,$$

wird aus der Differentiation jeder der beiden dieselbe Differentialgleichung entspringen

$$2ydy - adx - \frac{yydx}{a} + xdx = 0.$$

§289 Die Begründung dieser Diversität besteht darin, dass das Differential einer konstanten Größe $= 0$ ist. Wenn daher also eine endliche Gleichung auf eine Form solcher Art reduziert wird, dass allein eine gewisse konstante Größe vorhanden ist und sie nicht mit Variablen entweder multipliziert oder durch sie geteilt wird, dann wird durch Differentiation eine Gleichung gefunden werden, in welcher jene konstante Größe überhaupt nicht da ist. Und auf diese Weise kann jede beliebige konstante Größe, die in eine endliche Gleichung eingeht, durch Differentiation beseitigt werden. So, wenn diese Gleichung vorgelegt war

$$x^3 + y^3 = 3axy,$$

wenn sie durch xy dividiert wird, dass man $\frac{x^3+y^3}{xy} = 3a$ hat, wird diese Gleichung differenziert geben

$$2x^3ydx + 2xy^3dy - x^4dy - y^4dx = 0,$$

in welche die Konstante a nicht weiter eingeht.

§290 Wenn es mehrere konstante Größen, die in der endlichen Gleichung enthalten sind, beseitigt werden müssen, wird dies durch zwei oder mehrfach wiederholte Differentiation geschehen und schließlich werden von der Konstanten völlig freie Differentialgleichungen höherer Grade erhalten werden. Es sei diese Gleichung vorgelegt

$$yy = maa - nxx,$$

aus welcher durch Differentiation die konstanten maa und n beseitigt werden müssen. Die erste wird freilich durch eine erste Differentiation beseitigt werden, woher wird

$$ydy + nxdx = 0;$$

daher werde weiter die Gleichung $\frac{ydy}{xdx} + n = C$ gebildet, die für konstant genommenes dx durch Differentiation geben wird

$$xyddy + xdy^2 - ydxdy = 0;$$

auch wenn diese keine Konstante umfasst, erfasst sie dennoch alle in dieser Form $yy = maa - nxx$ enthaltene Gleichungen, welche Werte auch immer den Buchstaben m, n und aa zugeteilt werden, gleichermaßen in sich.

§291 In der Tat können nicht nur konstante Größen, die in die endliche Gleichung eingehen, durch Differentiation beseitigt werden, sondern auch die eine Variable, die natürlich, deren Differential konstant angenommen wird, wird durch Differentiation eliminiert werden können. Aus der zwischen x und y vorgelegten Gleichung werde nämlich der Wert x gesucht, dass $x = Y$ ist, während Y eine Funktion von y bezeichnet, und es wird $dx = dY$ sein, und für konstant genommenes dy wird durch Differenzieren $0 = ddY$ werden. Wenn aber war

$$xx + ax + b = Y,$$

wird durch Differenzieren $0 = d^2Y$ werden und die Gleichung

$$x^3 + axx + bx + c = Y$$

gibt viermal differenziert $0 = d^4Y$. Obwohl aber in diesen Gleichungen nur eine einzige Variable enthalten zu sein scheint, die deshalb aufhören würde variabel zu sein, während nur eine einzige Variable in keiner Gleichung vorhanden sein kann, ist sie dennoch, weil das Differential von dx konstant angenommen worden ist und sie in der Gleichung berücksichtigt werden muss, in Wirklichkeit in die Gleichung einzugehen, anzusehen. Daher ist sich nicht zu wundern, wenn öfter Differentialgleichungen zweiten oder höheren Grades auftauchen, in denen nur eine einzige Variable enthalten zu sein scheint.

§292 Besonders ist es aber anzumerken, dass durch die Differentiation irrationale und transzendente Größen aus der Gleichung beseitigt werden können. Was freilich die irrationalen Größen betrifft, weil ja durch bekannte Reduktionen die Irrationalität eliminiert werden kann, wird danach durch Differentiation eine von der Irrationalität freie Gleichung erhalten. Aber die kann oftmals angenehmer ohne diese Reduktion geschehen, während durch Vergleich der Differentialgleichung mit der endlichen irrationalen Formel, wenn nur eine vorhanden ist, eliminiert werden kann. Wenn aber zwei oder mehrere irrationale Teile in der endlichen Gleichung enthalten sind, dann werde ihre Differentialgleichung erneut differenziert und so werden so viele Differentialgleichungen höheren Grades gesucht wie eben benötigt werden, um die einzelnen irrationalen Teile zu eliminieren. Auf diese Weise werden sogar unbestimmte in gleicher Weise wie gebrochene Exponenten beseitigt werden können. Wie wenn war

$$y^m (aa - xx)^n ,$$

wird man nach der Differentiation haben

$$my^{m-1}dy = -2n (aa - xx)^{n-1} dxdx,$$

die durch die endliche geteilt gibt

$$\frac{mdy}{y} = -\frac{2nxdx}{aa - xx},$$

in welcher nicht weiter ein unbestimmter Exponent auftaucht. Daher tritt es klar zutage, dass eine von jeder Irrationalität freie Differentialgleichung ihren Ursprung aus einer endlichen irrationalen und sogar transzendente Größen involvierenden Gleichung genommen haben kann.

§293 Um aber zu verstehen, auf welche Weise durch Differentiation sogar transzendente Größen eliminiert werden, wollen wir mit Logarithmen beginnen; weil deren Differentiale algebraisch sind, wird die Aufgabe ohne

Schwierigkeiten bewältigt werden. Es sei nämlich

$$y = x \ln(x);$$

es wird $\frac{y}{x} = \ln(x)$ sein, woher durch Differenzieren $\frac{xdy - ydx}{xx} = \frac{dx}{x}$ wird und daher

$$xdy - ydx = xdx.$$

Wenn zwei Logarithmen enthalten sind, wird eine zweifache Differentiation von Nöten sein; es sei nämlich

$$y \ln(x) = x \ln(y);$$

es wird $\frac{y \ln(x)}{x} = \ln(y)$ und durch Differenzieren $\frac{xdy \ln(x) + ydx - ydx \ln(x)}{xx} = \frac{dy}{y}$ sein, aus welcher geschlossen wird, dass sein wird

$$\ln(x) = \frac{xxdy - yydx}{yxdy - yydx}.$$

Diese Gleichung werde nun wiederum für konstant gesetztes dx differenziert und es wird hervorgehen

$$\frac{dx}{x} = \frac{xxdy + 2xdxdy - 2ydxdy}{yxdy - yydx} + \frac{(yydx - xxdy)\left(yxddy + xdy^2 - ydxdy\right)}{(yxdy - yydx)^2}$$

oder

$$\frac{dx}{x} = \frac{y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - y^2xdxdy^2 + y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3}{(yxdy - yydx)^2},$$

die reduziert geben wird

$$y^3xdxddy - yyxxdxddy + 3yxxdxdy^2 - 2xyydxdy^2$$

$$+3y^3dx^2dy - 2xyydx^2dy - x^3dy^3 - \frac{y^4dx^3}{x} = 0$$

oder

$$yyxx(y - x)dxddy + 3yxdxdy(xxdy + yydx) - 2yyxxdxdy(dx + dy)$$

$$= x^4dy^3 + y^4dx^3$$

§294 Exponentialgrößen werden aus der Gleichung auf dieselbe Weise wie Logarithmen durch Differentiation beseitigt. Wenn nämlich eine von dieser Art vorgelegt war

$$P = e^Q,$$

wo P und Q irgendwelche Funktionen von x und y bezeichnen, wird die Gleichung in diese logarithmische $\ln(P) = Q$ verwandelt werden können, deren Differential $\frac{dP}{P} = dQ$ ist oder

$$dp = PdQ.$$

Und es steht nichts im Wege, wenn die Exponentialgrößen komplizierter waren; dann nämlich, wenn eine Differentiation nicht ausreicht, wird die Aufgabe mit zwei oder mehr bewältigt werden.

I. Es sei $y = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; es werde Zähler sowie Nenner dieses Bruches mit e^x multipliziert und es wird $y = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ sein; daher wird $e^{2x} = \frac{y+1}{y-1}$ und $2x = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$, dessen Differential ist

$$dx = -\frac{dy}{yy-1} = \frac{dy}{1-yy}.$$

II. Es sei $y = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$; es wird durch die erste Differentiation $dy = \frac{(e^x-e^{-x})dx}{e^x+e^{-x}}$ werden. Also $2x = \ln\left(\frac{dy+dx}{dx-dy}\right)$. Für konstant genommenes dx wird also $dx = \frac{dxddy}{dx^2-dy^2}$ sein oder aber

$$dx^2 = ddy + dy^2.$$

§295 Auf die gleiche Weise werden vom Kreis abhängende transzendente Größen mit Hilfe einer Differentiation aus der Gleichung eliminiert werden können, wie aus diesen Beispielen eingesehen wird.

I. Es sei $y = a \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$; es wird sein

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}.$$

II. Es sei $y = a\cos\left(\frac{y}{x}\right)$; es wird $\frac{y}{a} = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ und $\frac{dy}{a} = \frac{-xdy+ydx}{xx}\sin\left(\frac{y}{x}\right)$ sein. Aber weil $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{a}$ ist, wird $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{aa-yy}}{a}$ sein, nach Einsetzen welches Wertes man $\frac{dy}{a} = \frac{(ydx-xdy)\sqrt{aa-yy}}{axx}$ haben wird oder

$$xxdy = (ydx - xdy)\sqrt{aa - yy}.$$

III. Es sei $y = m\sin(x) + n\cos(x)$; es wird nach der ersten Differentiation $dy = mdx\cos(x)\, ndx\sin(x)$ sein; diese wird erneut differenziert für konstant festgelegtes dx $ddy = -mdx^2\sin(x) - ndx^2\cos(x)$ geben; diese gibt aber durch die erste geteilt $\frac{ddy}{y} = -dx^2$ oder

$$ddy + ydx^2 = 0,$$

aus welcher nicht nur Sinus und Kosinus, sondern auch die Konstanten m und n verschwunden sind.

IV. Es sei $y = \sin\ln(x)$; es wird $\arcsin(y) = \ln(y)$ sein; woher durch Differentiation $\frac{dy}{\sqrt{1-yy}} = \frac{dx}{x}$ wird; diese gibt nach Nehmen von Quadraten $xxdy^2 = dx^2 - yydx^2$ und diese liefert für konstant gesetztes dx weiter differenziert $2xxdyddy + 2xdxdy^2 = -2ydx^2dy$ oder

$$xxddy + xdxdy + ydx^2 = 0.$$

V. Es sei $y = ae^{mx}\sin(nx)$; es wird durch Differenzieren sein

$$dy = mae^{mx}dx\sin(nx) + nae^{mx}dx\cos(nx)\,,$$

die durch die vorgelegte geteilt gibt

$$\frac{dy}{y} = mdx + \frac{ndx\cos(nx)}{\sin(nx)} = mdx + ndx\cot(nx)\,.$$

Es wird also sein

$$\operatorname{arccot}\left(\frac{dy}{nydx} - \frac{m}{n}\right) = nx.$$

Diese Gleichung gibt für konstant festgelegtes dx differenziert

$$ndx = \frac{ndxdy^2 - nydxddy}{m^2y^2dx^2 + n^2y^2dx^2 - mydxdy + dy^2}$$

oder

$$\left(m^2+n^2\right)y^2dx^2-2mydxdy=-yddy.$$

Es sei also klar, auch wenn in dieser Differentialgleichung keine transzendenten Größen enthalten sind, dass sie dennoch aus einer endlichen Gleichung entspringen können, die mit wie auch immer transzendenten Größe behaftet ist.

§296 Weil ja also Differentialgleichungen entweder ersten oder höheren Grades, die zwei Variablen x und y enthalten, aus endlichen Gleichungen entspringen, wird mit ihnen eine Relation zwischen diesen Variablen ausgedrückt. Nachdem natürlich irgendeine die zwei Variablen x und y umfassende Differentialgleichung vorgelegt worden ist, wird mit ihr eine gewisse Relation zwischen x und y angedeutet, nach welcher y eine gewisse Funktion von x ist. Daher wird die Natur einer Differentialgleichung erkannt, wenn anstelle von y die Funktion von x angegeben können wird, die durch jene Gleichung angezeigt wird oder die so beschaffen ist, dass, wenn sie überall anstelle von y und ihr Differential anstelle von dy und ihre höheren Differentiale anstelle von ddy, d^3y etc. eingesetzt werden, die identische Gleichung resultiert. Im Ausfindigmachen dieser Funktion besteht aber das Integralkalkül, dessen Ziel dahin gerichtet ist, dass nach Vorlegen irgendeiner Differentialgleichung jene Funktion von x , welcher die andere Variable y gleich ist, bestimmt wird oder, was auf dasselbe zurückgeht, dass eine endliche Gleichung gefunden wird, in welcher die Relation zwischen x und y enthalten ist.

§297 Wenn eines Beispiels wegen diese Gleichung vorgelegt wird

$$2ydy-adx-\frac{yydx}{a}+xdx=0,$$

zu welcher wir oben (§288) gelangt sind, wird eine Relation solcher Art zwischen x und y definiert, die zugleich in dieser endlichen Gleichung

$$yy-ax=bbe^{\frac{x}{a}}$$

enthalten ist. Weil also daher $yy=aa+bbe^{\frac{x}{a}}$ ist, tritt es klar zutage, dass

$$\sqrt{ax+bbe^{\frac{x}{a}}}=y$$

eine Funktion von x ist, welcher die Variable y vermöge der vorgelegten Differentialgleichung gleich ist. Denn wenn wir in der Gleichung anstelle von

yy diesen Wert $ax + bbe^{\frac{x}{a}}$ und anstelle von $2ydy$ sein Differential $adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx$ einsetzen, wird diese identische Gleichung entspringen

$$adx + \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx - adx - xdx - \frac{bb}{a}e^{\frac{x}{a}}dx + xdx = 0.$$

Und so tritt es klar zutage, dass jede Differentialgleichung gleichermaßen wie endliche eine gewisse Relation zwischen den Variablen x und y darbietet, die aber ohne Hilfe des Integralkalküls nicht aufgefunden werden kann.

§298 Damit diese Dinge leichter eingesehen werden, wollen wir festlegen, dass die Funktion von x bekannt ist, die y vermöge der irgendeiner Differentialgleichung entweder erster oder höheren Grades zukommt, und es sei

$$dy = pdx,\ dp = qdx,\ dq = rdx \text{ etc,}$$

und wenn in der Gleichung das Differential dx konstant angenommen worden ist, wird $ddy = qdx^2$ sein, $d^3y + rdx^3$ etc. sein; nachdem diese Werte in der Gleichung eingesetzt worden sein werden, werden wegen ihrer homogenen Terme die Differentiale dx durch Division verschwinden und es wird eine nur die endlichen Größen x, y, p, q, r etc. umfassende Gleichung entspringen. Weil also p, q, r etc. von der Natur der Funktion y abhängende Größen und, wird die Gleichung in Wahrheit nur zwischen den zwei Variablen x und y bestehen; und so steht fest, dass mit jeder Differentialgleichung eine gewisse Relation zwischen den Variablen x und y bestimmt wird. Deswegen, wenn in der Lösung eines gewissen Problems zu einer Differentialgleichung zwischen x und y gelangt wird, ist durch sie gleichermaßen eine Relation zwischen x und y ausgedrückt zu werden anzusehen wie wenn zu einer endlichen Gleichung gelangt worden wäre.

§299 Auf diese Weise kann also eine jede Differentialgleichung so auf eine endliche Form zurückgeführt werden, dass in ihr nur endliche Größen enthalten sind, die Differentiale oder die unendlich kleinen Größen hingegen völlig herausgehen. Weil nämlich y eine gewisse Funktion von x ist, werden, wenn $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ etc. gesetzt wird, welches Differential auch immer konstant angenommen worden ist, die zweiten und höheren Differentiale dx ausgedrückt werden, die darauf folgend durch Division völlig beseitigt werden. Wie wenn diese Gleichung vorgelegt werden würde

$$xyd^3y + xxdyddy + yydxddy - xydx^3 = 0,$$

in welcher dx konstant festgelegt wird, wird sie nach Setzen von $dy = pdx$, $dp = qdx$ und $dq = rdx$ übergehen in

$$xyr + xxpq + yyq - xy = 0,$$

nachdem natürlich die ganze Gleichung durch dx^3 geteilt worden ist. Und diese endliche Gleichung bestimmt die Relation zwischen x und y.

§300 Daher werden alle Differentialgleichungen, von welcher Ordnung auch immer sie sind, mit diesen Substitutionen

$$dy = pdx,\ dp = qdx,\ dq = rdx \text{ etc}$$

auf lediglich endliche Größen zurückgeführt. Und wenn die Differentialgleichung von erster Ordnung war, so dass nur die ersten Differentiale in sie eingehen, wird durch die Reduktion außer den Variablen y und x darüber hinaus die Größe p eingeführt werden. Wenn die Differentialgleichung aber von zweiter Ordnung war, auch die zweiten Differentiale enthaltend, wird außerdem die Größe q, und wenn sie eine Differentiale von dritter Ordnung, wird darüber hinaus die Größe r eingeführt werden und so weiter. Weil ja also auf diese Weise die Differentiale völlig aus der Rechnung entfernt werden, beinhaltet jenes Verhältnis überhaupt kein konstantes Differential und es wird nicht weiter, auch wenn die aus den zweiten Differentiale herstammenden Größen q, r enthalten sind, nötig sein, anzugeben, ob ein gewisses Differential konstant angenommen worden ist. Es ist nämlich unwichtig, ob in der Entwicklung irgendein Differential nach Belieben konstant festgelegt wird oder keines.

§301 Wenn also eine Differentialgleichung zweiten oder höheren Grades vorgelegt wird, in welcher kein erstes Differential konstant angenommen worden zu sein gesagt wird, wird auf diese Weise sofort ermittelt werden können, ob sie eine bestimmte Relation zwischen der Variablen x und y enthält oder nicht. Weil nämlich kein Differential konstant angenommen wird, bleibt es unserem Belieben überlassen, welches Differential wir konstant festlegen wollen, und daher wird nur zu erkennen sein, ob, nachdem verschiedene Differentiale konstant festgelegt worden sind, die Gleichung dieselbe Relation zwischen x und y darbietet. Wenn dies nicht passiert, ist dies ein sicheres Zeichen, dass die Gleichung keine bestimmte Relation ausdrückt und daher in der Lösung von keinem Problem auftreten kann. Die sicherste und zugleich leichteste Art, dies ausfindig zu machen, wird die selbst sein, welche wir oben [§277] bei der gleichen Aufgabe für das Erkennen von Differentialausdrücken höherer Ordnungen und der Frag, ob sie feste Bedeutungen haben, angegeben haben.

§302 Nachdem also eine Differentialgleichung zweiten oder höheren Grades von dieser Art vorgelegt worden ist, in welcher kein Differential konstant festgelegt worden ist, werde das Differential dx konstant gesetzt; darauf werde diese Gleichung, wie wir es oben [§276] über Differentialausdrücke gezeigt haben, wiederum auf eine Form von solcher Art reduziert, die kein konstantes Differential beinhaltet, indem natürlich folgendes festgesetzt wird

$$ddy - \frac{dyddx}{dx} \text{ anstelle von } ddy \text{ und } d^3y - \frac{3ddxddy}{dx} + \frac{3dyddx^2}{dx^2} - \frac{dyd^3x}{dx} \text{ anstelle von } d^3ydx$$

Danach werde ermittelt, ob die auf diese Weise resultierende Gleichung mit der vorgelegten übereinstimmt; wenn dies der Fall ist, wird die vorgelegte Gleichung eine bestimmte Relation zwischen x und y umfassen; wenn sich das aber nicht ereignet, wird die Gleichung unbestimmt sein und kein bestimmtes Verhältnis zwischen den Variablen x und y ausdrücken, wie dies schon zuvor ausführlicher bewiesen worden ist.

§303 Es sei, um dies besser zu erklären, diese Gleichung vorgelegt, die, nachdem kein Differential konstant gesetzt worden ist, gefunden worden zu sein gesagt werde,

$$Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

Es werde dx konstant gesetzt und sie wird übergehen in diese

$$Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Aus dieser werde sich auf die zuvor vorgeschriebene Weise nun wiederum der Betrachtung eines Differentials als konstant entledigt und es wird erhalten werden

$$-\frac{Qdyddx}{dx} + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0;$$

Weil diese von der vorhergehenden nur in Bezug auf den ersten Term abweicht, ist zu sehen, ob $P = -\frac{Qdy}{dx}$ ist. Wenn dies festgestellt wird, wird die vorgelegte

Gleichung eine feste Relation zwischen x und y darbieten, die durch die im Integralkalkül anzugebenden Regeln aufgefunden werden wird, welches erste Differential auch immer konstant angenommen wird. Aber wenn nicht $P = -\frac{Qdy}{dx}$ werden kann, wird die vorgelegte Gleichung unmöglich sein.

§304 Wenn also diese vorgelegte Gleichung

$$QPddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = 0$$

nicht absurd ist, ist es nötig, dass $Pdx + Qdy = 0$ ist, was auf zweifache Weise passieren kann; entweder wird nämlich tatsächlich $P = -\frac{Qdy}{dx}$ sein oder die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ die identische, oder es wird $Pdx + Qdy = 0$ selbst jene Differentialgleichung ersten Grades sein, aus deren Differentiation die vorgelegte entstanden ist; in diesem zweiten Fall wird die Gleichung $Pdx + Qdy = 0$ mit der vorgelegten übereinstimmen und und wird dieselbe Relation zwischen x und y enthalten und so wird diese Relation ohne Hilfe des Integralkalküls gefunden werden können. Weil nämlich $Pdx + Qdy = 0$ ist, wird durch Differenzieren sein

$$Qddx + Qddy + dPdx + dQdy = 0,$$

welche von der vorgelegten Gleichung subtrahiert diese zurückgelassen wir

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 = dPdx + dQdy.$$

Weil aber $dy = -\frac{Pdx}{Q}$ ist, werden die Differentiale vollkommen eliminiert werden können und es wird eine endliche Gleichung zwischen x und y entsprießen, die deren Relation anzeigt.

§305 Wir wollen festlegen, dass in der Lösung eines Problems für kein konstant angenommenes Differential zu dieser Gleichung gelangt worden ist

$$x^3ddx + xxyddy - yydx^2 + xxdy^2 + aadx^2 = 0.$$

Es wird also, weil die Gleichung nichts Absurdes zu enthalten bekannt ist, sein

$$x^3dx + xxydy = 0 \text{ oder } xdx + ydy = 0,$$

deren Differential sein wird

$$x^3ddx + xxyddy + 3xxdx^3 + 2xydxdy + xxdy^2 = 0,$$

welche Gleichung von der vorgelegten subtrahiert zurücklässt

$$aadx^2 - yydx^2 - 3xxdx^2 - 2xydxdy = 0$$

oder

$$aadx - yydx - 3xxdx - 2xydy = 0.$$

Weil aber $xdx + ydy = 0$ ist, wird sein

$$2xydy = -2xxdx$$

und daher

$$aadx - yydx - xxdx = 0 \text{ oder } yy + xx = aa;$$

diese Gleichung drückt die wahre Relation zwischen x und y aus, weil sie ja mit dem zuerst gefundenen Differential $xdx + ydy = 0$ übereinstimmt. Wenn sich diese Übereinstimmung nicht gezeigt hätte, wäre die vorgelegte Gleichung für unmöglich zu halten; weil sie aber in diesem Fall aufgetreten ist, war es möglich, die endliche Gleichung $xx + yy = aa$ ohne das Integralkalkül zu finden.

§306 Um aber auch ein Beispiel einer unmöglichen Gleichung anzuführen, sei diese Gleichung vorgelegt

$$yyddx - xxddy + ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 0,$$

in welcher kein Differential konstant angenommen worden sei. Es wäre also $yyddx - xxddy + 2ydxdy - 2xdxdy = 0$, die der vorgelegten gleich gesetzt geben wird

$$ydx^2 - xdy^2 + adxdy = 2ydxdy - 2xdxdy.$$

Weil aber $dy = \frac{yydx}{xx}$ ist, wird durch Auslösen der Differentiale erhalten werden

$$y - \frac{y^4}{x^3} + \frac{ayy}{xx} = \frac{2y^3}{xx} - \frac{2yy}{x}$$

oder

$$x^3 - y^3 + axy = 2xyy - 2xxy;$$

ob diese mit dem Differential $yydx - xxdy = 0$ übereinstimmt wird, indem sie differenziert wird, leicht klar werden; es wird nämlich werden

$$3xxdx - 3yydy + axdy + aydx = 2yydx + 4xydy - 2xxdy - 4xydx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xx + ay - 2yy + 4xy}{3yy - ax + 4xy - 2xx};$$

aber aus jener ist $\frac{dy}{dx} = \frac{yy}{xx}$ und es wäre daher

$$3x^4 + 4x^3y + axxy = 3y^4 + 4xy^3 - axyy$$

oder

$$axy = \frac{3y^4 + 4xy^3 - 4x^3y - 3x^4}{x + y} = 3y^3 + xyy - xxy - 3x^3.$$

Aber aus der zuerst gefundenen endlichen Gleichung ist

$$axy = y^3 + 2xyy - 2xxy - x^3,$$

die von dieser subtrahiert zurücklässt, die in diese aufgelöst wird

$$0 = y - x \text{ und } 2yy + yx + 2xx = 0.$$

Von diesen kann jene freilich $y = x$ mit dem Differential $dy = \frac{yydx}{xx}$ übereinstimmen, aber sie in der Tat widerspricht sie der zuerst gefundenen endlichen Gleichung; wenn nicht $a = 0$ gesetzt wird oder wenn nicht jede der beiden Variablen x und y konstant festgelegt wird, in welchem Fall freilich wegen $dx = 0$ und $dy = 0$ allen Differentialgleichungen Genüge geleistet wird, kann die vorgelegte Gleichung nicht bestehen.

§307 Wir wollen nun auch die drei Variablen x, y und z involvierende Differentialgleichungen betrachten, die entweder ersten oder zweiten oder höheren Grades sein werden. Um deren Natur zu untersuchen, muss es angemerkt werden, dass eine endliche drei Variablen umfassende Gleichung eine Relation bestimmt, in welcher irgendeine einzige zu den übrigen steht, es wird also definiert, was für eine Funktion z von x und y ist. Wie also eine endliche Gleichung von dieser Art aufgelöst wird, wenn aufgefunden wird, was für eine Funktion von x und y für z eingesetzt werden muss, dass der Gleichung genüge geleistet wird, so wird auch eine drei Variablen umfassende Differentialgleichung bestimmen, was für eine Funktion eine einzige von den übrigen ist; und es ist derjenige Gleichungen dieser Art aufgelöst zu haben anzusehen, der die Funktion der zwei Variablen x und y angegeben hat, die anstelle der dritten eingesetzt der Gleichung genügt oder sie zur identischen macht. Also wird die Differentialgleichung aufgelöst, wenn entweder die den Wert von z darbietende Funktion von x und y bestimmt wird oder eine endliche angegeben wird, mit welcher derselbe entsprechende Wert von z ausgedrückt wird.

§308 Obwohl aber jede nur zwei Variablen umfassenden Differentialgleichung immer eine bestimmte Relation zwischen ihnen ausdrückt, passiert dies dennoch nicht immer bei Differentialgleichungen von drei Variablen. Es sind nämlich Gleichungen solcher Art gegeben, denen auf überhaupt keine Weise genüge geleistet werden können wird, welche Funktion von x und y auch immer an der Stelle von z eingesetzt wird. Wie wenn diese Gleichung vorgelegt war

$$zdy = ydx,$$

so wird es leicht klar, dass überhaupt keine Funktion von x und y gegeben ist, die anstelle von z eingesetzt $zdy = ydx$ ergibt; denn die Differentiale dx und dy werden auf keine Weise eliminiert werden. Auf die gleiche Weise ist es klar, dass keine Funktion vom x und von z gegeben ist, die anstelle von y eingesetzt derselben Gleichung genügt. Welche Funktion von x und z für y nämlich auch immer aufgefasst wird, in ihrem Differential dy ist dz vorhanden, was, weil es in der Gleichung nicht enthalten ist, nicht aufgehoben können wird. Dieser Sache wegen kann keine endliche Gleichung zwischen x,y und z gegeben sein, die der Differentialgleichung $zdy = ydx$ zukommt.

§309 Daher müssen drei Variablen enthaltende Differentialgleichungen in imaginäre und reelle eingeteilt werden. Es wird aber eine Gleichung von dieser Art imaginär oder absurd sein, welcher durch keine endliche Gleichung Genüge geleistet werden kann, von welcher Art $zdy = ydx$ war, die wir gerade betrachtete haben. Es wird aber eine Gleichung eine reelle sein, zu welcher eine gleichwertige endliche Gleichung dargeboten werden kann, was passiert, wenn eine einzige Variable einer gewissen Funktion der zwei übrigen gleich wird. Von dieser Art ist diese Gleichung

$$zdy + ydz = xdz + zdx + xdy + ydx;$$

diese stimmt nämlich mit dieser endlichen $yz = xz + xy$ überein und es wird

$$z = \frac{xy}{y - x}.$$

Dieser Unterschied zwischen imaginären und reellen Gleichungen von dieser Art ist also sorgfältiger festzuhalten, besonders im Integralkalkül, weil es lächerlich wäre, das Integral von einer Differentialgleichung zu verlangen, das heißt eine Genüge leistende Gleichung zu suchen, die überhaupt kein solches Integral hat.

§310 Zuerst tritt es also klar zutage, dass alle Differentialgleichungen dreier Variablen, in denen nur die Differentiale von zweien auftauchen, imaginär und absurd sind. Wir wollen nämlich festlegen, dass in einer Gleichung, die die Variable z enthalte, nur die Differentiale dx und dy enthalten sind, dass Differential dz aber völlig fehlt, und es wird offenbar sein, dass keine Funktion von x und y dargeboten werden kann, die anstelle von z eingesetzt die identische Gleichung hervorbringt; denn die Differentiale dx und dy werden auf keine Weise aufgehoben werden. In diesen Fällen ist ganz und gar keine endliche Genüge leistende Gleichung gegeben; wenn nicht zufällig eine Relation zwischen x und y solcher Art angegeben werden kann, die, was auch immer z ist, bestehen kann, wie es in dieser Gleichung geschieht

$$zdy - zdx = ydy - xdx,$$

welcher die Gleichung $y = x$ genügt. Leicht wird aber ausfindig gemacht, in welchen Fällen dies passiert, indem die Relation zwischen x und y gesucht wird, zuerst natürlich wenn $z = 0$ ist, und dann, ob diese Relation der Gleichung für irgendeinen Wert z genügt.

§311 Und in der Tat ist eine drei Variablen involvierende Gleichung nicht nur absurd, wenn sie nur zwei Differentiale enthält, sondern auch, wenn in ihr alle drei Differentiale auftauchen, wird sie eine solche sein können. Um diese Fälle zu entwickeln, wollen wir festlegen, dass P und Q Funktionen nur von x und y sind und man nur diese Gleichung hat

$$dz = Pdx + Qdy;$$

wenn diese nicht absurd ist, wird z eine gewisse Funktion von x und y sein, deren Differential $dz = pdx + qdy$ ist, und es wird $P = p$ und $Q = q$ sein. Aber oben [§232] haben wir bewiesen, dass $pdx + qdy$ kein Differential einer gewissen Funktion von x und y sein kann, wenn nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ gilt.

§312 Auf ganz und gar gleiche Weise wird die Begründung für diese Gleichung verlaufen

$$dZ = Pdx + Qdy,$$

wenn Z irgendeine Funktion von z bezeichnet, P und Q hingegen die dritte Variable z nicht umfassende Funktionen von x und y sind. Damit nämlich Z einer Funktion von $x$und y gleich werden kann, ist es nötig, dass $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Aus diesem Kriterium kann eine jede vorgelegte Differentialgleichung, die freilich in dieser allgemeinen Form enthalten ist, beurteilt werden, ob sie keine reelle oder absurd ist. So wird klar zutage treten, dass diese Gleichung $zdz = ydx + xdy$ reell ist; denn wegen $P = y$ und $Q = x$ wird

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 1 = \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 1.$$

Diese Gleichung $azdz = yydx + xxdy$ ist hingegen absurd; es wird nämlich

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = 2y \text{ und } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = 2x,$$

welche Werte ungleich sind.

§313 Um aber das sich am weitesten erstreckendes Kriterium ausfindig zu machen, seien P, Q und R irgendwelche Funktionen von x, y, und z; und jede Differentialgleichung von drei Variablen, wenn sie freilich ersten Grades ist, wird in dieser Form enthalten sein

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Sooft also diese Gleichung null ist, wird z einer gewissen Funktion von x und y gleich und ihr Differential wird deshalb von dieser Form $dz = pdx + qdy$ sein. Daher, wenn in der vorgelegten Gleichung diese Funktion von x und y anstelle von z und $pdx + qdy$ anstelle von dx eingesetzt wird, ist es notwendig, dass die identische Gleichung diese wird

$$dz = -\frac{Pdx}{R} - \frac{Qdy}{R};$$

wenn in P, Q und R jener Wert anstelle von z eingesetzt wird, ist es notwendig, dass wird

$$p = -\frac{P}{R} \text{ und } q = -\frac{Q}{R}.$$

§314 Weil ja aber $dz = pdx + qdy$ ist, wird durch das zuvor Bewiesene $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ sein. Weil also nach Einsetzen des Wertes anstelle von z und x und y ist

$$p = -\frac{P}{R} \text{ und } q = -\frac{Q}{R},$$

wird sein

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{-RdP + PdR}{RRdy}\right) \text{ und } \left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{-RdQ + QdR}{RRdx}\right)$$

und daher wird man durch Multiplizieren mit RR diese Gleichung haben

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

wo die Nenner dy und dx wiederum anzeigen, dass in den Differentialen der Zähler allein die Größe variabel angenommen werden muss, deren Differential den Nenner festlegt. Aber diese Differentiale dP, dQ, dR können nicht zuvor erkannt werden, bis in den Größen P , Q und R selbst der entsprechende Wert von z eingesetzt worden ist; weil dieser aber unbekannt ist, wird auf die folgenden Weise vorzugehen sein.

§315 Weil P, Q und R Funktionen von x, y und z sind, wollen wir festlegen

$$\begin{aligned} dP &= \alpha dx + \beta dy + \gamma dz \\ dQ &= \delta dx + \varepsilon dy + \zeta dz \\ dR &= \eta dx + \theta dy + \iota dz, \end{aligned}$$

wo α, β, γ, δ, ε etc. die Funktionen bedeuten, die aus der Differentiation entspringen. Wir wollen nun anstelle von z überall seinen Wert in x und y ausgedrückt eingesetzt zu werden auffassen und anstelle von dz wollen wir den Wert $pdx + qdy$ setzen und es wird werden

$$\begin{aligned} dP &= (\alpha + \gamma p)\, dx + (\beta + \gamma q)\, dy \\ dQ &= (\delta + \zeta p)\, dx + (\varepsilon + \zeta q)\, dy \\ dR &= (\eta + \iota p)\, dx + (\theta + \iota q)\, dy. \end{aligned}$$

Aus diesen Werten wird also sein

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dy}\right) &= \theta + \iota q, \quad \left(\frac{dR}{dx}\right) = \eta + \iota p \\ \left(\frac{dP}{dy}\right) &= \beta + \gamma q, \quad \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \delta + \zeta p \end{aligned}$$

§316 Weil also für die Realität der Gleichung verlangt wird, dass gilt

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) - R\left(\frac{dP}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right),$$

wird, wenn die gefundenen Werte eingesetzt werden, werden

$$P\left(\theta + \iota q\right) - R\left(\beta + \gamma q\right) = Q\left(\eta + \iota p\right) - R\left(\delta + \xi p\right).$$

Aber zuvor haben wir gefunden, dass ist

$$p = -\frac{P}{R} \text{ und } q = -\frac{Q}{R},$$

welche Werte, weil die Differentiale nicht weiter in die Rechnung eingehen, verwendet werden können werden, auch wenn anstelle von z nicht sein Wert in x und y eingesetzt wird. Und es wird daher sein

$$PQ - \frac{PQ\iota}{R} - R\beta + Q\gamma = Q\eta - \frac{PQ\iota}{R} - R\delta + P\xi$$

oder

$$0 = P\left(\xi - \theta\right) + Q\left(\eta - \gamma\right) + R\left(\beta - \delta\right).$$

Weil aber die Größen β; δ, γ, η, ξ, θ durch Differentiation gefunden werden, wird unter Verwendung der oberen Bezeichnungsweise sein

$$0 = P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right).$$

Wenn diese Eigenschaft in der Gleichung nicht Geltung hat, wird die Gleichung nicht reell sein, sondern imaginär und absurd.

§317 Obwohl wir diese Regel aus der Betrachtung der Variable z gefunden haben, ist es dennoch, weil alle Größen gleichermaßen eingehen, offenbar, dass aus der Betrachtung der übrigen der derselbe Ausdruck hervorgehen wird. Nachdem also irgendeine Differentialgleichung ersten Grades vorgelegt worden ist, die drei Variablen involviere, wird sofort beurteilt werden können, ob sie reell oder imaginär ist. Sie werde nämlich mit dieser allgemeinen Gleichung verglichen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

und es werden der Wert dieser Formel gesucht

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right);$$

$=0$ war, wird die Gleichung reell sein; wenn er aber nicht $=0$ war, ist dies ein sicheres Zeichen, dass diese Gleichung imaginär oder absurd ist.

§318 Eine vorgelegte Gleichung kann durch Division auch immer auf eine Form von dieser Art zurückgeführt werden

$$Pdx+Qdy+dz=0;$$

weil in diese die erste übergeht, wenn $R=1$ wird, wird das Kriterium einfacher auf diese Weise ausgedrückt werden

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right)-Q\left(\frac{dP}{dz}\right)+\left(\frac{dP}{dy}\right)-\left(\frac{dQ}{dx}\right)=0.$$

Sooft nämlich dieser Ausdruck tatsächlich gleich Null aufgefunden wird, sooft wird die vorgelegte Gleichung reell sein; wenn aber das Gegenteil passiert, wird die Gleichung imaginär sein. Das Zweite ist freilich aus den Dingen, die wir bewiesen haben, gewiss; über das Erste kann aber noch gezweifelt werden, ob die Gleichung immer reell ist, sooft freilich dieses Kriterium es anzeigt. Weil das aber an dieser Stelle nicht lückenlos bewiesen werden kann, sondern erst im Integralkalkül mit einem Beweis bestätigt werden kann, wollen wir es hier nur anführen und es ist daher aber keine Gefahr zu befürchten, wenn jemand dermaßen an seiner Gültigkeit zweifeln wollte.

§319 Aus diesem Kriterium tritt es zuerst klar zutage, wenn in der Gleichung

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

P eine Funktion nur von x, Q eine Funktion nur von y und R eine Funktion von z war, dass die Gleichung immer reell sein wird. Es wird nämlich

$$\left(\frac{dP}{dy}\right)=0,\ \left(\frac{dP}{dz}\right)=0,\ \left(\frac{dQ}{dz}\right)=0,\ \left(\frac{dQ}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dR}{dx}\right)=0,\ \left(\frac{dR}{dy}\right)=0,$$

und so wird der ganze Ausdruck des Kriteriums von selbst verschwinden.

§320 Wenn wie zuvor P eine Funktion nur von x und Q eine Funktion nur von y war, aber R irgendeine Funktion von x, y und z, wird die Gleichung reell sein, wenn war

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) \text{ oder } \left(\frac{dR}{dx}\right) : \left(\frac{dR}{dy}\right) = P : Q.$$

So, wenn diese Gleichung vorgelegt war

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3dy}{y} + \frac{x^2y^3dz}{z^6} = 0,$$

weil hier ist

$$P = \frac{2}{x}, Q = \frac{3}{y} \text{ und } R = \frac{x^2y^3}{z^6},$$

daher

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{2xy^3}{z^6} \text{ sowie } \left(\frac{dR}{dy}\right) = \frac{3xxyy}{z^6},$$

wird sein

$$P\left(\frac{dR}{dy}\right) = Q\left(\frac{dR}{dx}\right) = \frac{6xyy}{z^6}$$

und daher wird die vorgelegte Gleichung reell sein.

§321 Wenn P und Q Funktionen von x und y waren, aber R eine Funktion nur von z, wird wegen

$$\left(\frac{dP}{dz}\right) = 0, \left(\frac{dQ}{dz}\right) = 0, \left(\frac{dR}{dx}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{dR}{dy}\right) = 0$$

die Gleichung reell sein, wenn $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ war. Diese selbe Bedingung wird aber verlangt, wenn $Pdx + Qdy$ ein bestimmtes Differential oder aus der Differentiation einer gewissen endlichen Funktion von x und y entstanden sein muss. Und darauf geht zurück, was wir aber (§312) schon bemerkt haben, dass die Gleichung $dZ = Pdx + Qdy$, wenn Z eine Funktion nur von z ist, aber P und Q Funktionen von x und y, nicht reell sein kann, wenn nicht $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ ist. Aber diese beiden Fälle stimmen miteinander völlig überein; denn anstelle von Rdz, wenn R eine Funktion nur von z ist, kann dZ gesetzt werden, während Z eine Funktion von z ist.

§322 Um dieses gefundene Kriterium an einem Beispiel zu illustrieren, wollen wir diese Gliederung betrachten

$$\left(6xy^2z-5yz^3\right)dx+\left(5x^2yz-4xz^3\right)dy+\left(4x^2y^2-6xyz^2\right)dz=0;$$

weil nach Vergleich dieser mit der allgemeinen Form gilt

$$\begin{aligned}
P &=6xy^2z-5yz^3, & \left(\frac{dP}{dy}\right) &=12xyz-5z^3, & \left(\frac{dP}{dx}\right) &=6xy^2-15yz^3,\\
Q &=5x^2yz-4xz^3, & \left(\frac{dQ}{dx}\right) &=10xyz-4z^3, & \left(\frac{dQ}{dz}\right) &=5x^2y-12xzz,\\
R &=4x^2y^2-6xyz^2, & \left(\frac{dR}{dx}\right) &=8xy^2-6yz^2, & \left(\frac{dR}{dy}\right) &=8xy^2-6xz^2.
\end{aligned}$$

Nach Finden dieser Werte wird die das Urteil enthaltende Gleichung diese sein

$$\begin{aligned}
&(6xy^2z-5yz^3)(-3xxy-6xzz)\\
+&(5x^2yz-4xz^3)(2xyy\quad+9yzz)\\
+&(4x^2y^2-6xyz^2)(2xyz\;-z^3)\qquad=0
\end{aligned}$$

Wenn aber dieser Ausdruck entwickelt wird, neben heben sich tatsächlich alle Terme gegenseitig auf und es wird $0=0$, was anzeigt, dass die vorgelegte Gleichung Null ist.

§323 Wann immer aber ein auf diese Weise aus dem Kriterium gefundener Ausdruck nicht verschwindet, dann ist das ein Zeichen, dass die vorgelegte Gleichung imaginär ist. Weil ja aber auf diese Weise aus dem Kriterium eine endliche Gleichung gefunden wird, wird sie, wenn sie freilich der Differentialgleichung zukommt, zugleich die Relation aufzeigen, in welcher die Variablen zueinander stehen. Und auf diese Weise werden die Fälle, die wir oben erwähnt haben (§310), entwickelt. Es sei nämlich diese Gleichung vorgelegt

$$(z-x)dx+(y-z)dy=0;$$

es wird werden

$$P=z-x,\ Q=y-z \text{ und } R=0,$$

weiter

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)=1 \text{ und } \left(\frac{dQ}{dz}\right)=-1.$$

Die das Urteil darbietende Gleichung wird

$$P\left(\frac{dQ}{dz}\right) = Q\left(\frac{dP}{dz}\right)$$

oder

$$z - x = z - y;$$

daher wird

$$y = x.$$

Weil es also hier zufällig in diesem Fall passiert, dass die Gleichung $y = x$ zugleich der Differentialgleichung genügt, ist zu sagen, dass die vorgelegte Gleichung nichts anderes bedeutet, außer dass $y = x$ ist.

§324 Nachdem also eine dieser Variablen enthaltende Differentialgleichung vorgelegt worden ist

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

werden die drei folgenden Fälle zu betrachten sein, zu welchen die nachstehende Gleichung führt

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Der erste ist der, wenn dieser Ausdruck tatsächlich $= 0$ wird, und dann wird die vorgelegte Gleichung reell sein. Wenn aber diese endliche Gleichung nicht die identische ist, dann ist zu ermitteln, ob sie der vorgelegten Gleichung genügt; wenn dies passiert, wird man eine endliche Gleichung haben, welches der zweite Fall ist. Der dritte Fall tritt aber auf, wenn die endliche Gleichung nicht zusammen mit der vorgelegten Differentialgleichung bestehen kann, und dann wird die vorgelegte Gleichung imaginäre sein; denn es wird nämlich keine endliche Gleichung dargeboten werden können, die selbiger Genüge leistet.

§325 Der erste und dritte Fall sind de se klare, der zweite aber, auch wenn er sehr selten auftaucht, verdient es dennoch sorgfältig angemerkt zu werden; und weil wir für ihn ein Beispiel schon oben in der Gleichung, die nur zwei Differentiale enthält, dargeboten haben, wollen wir auch eine Gleichung anführen, in welcher alle drei Differentiale enthalten sind

$$(z-y)dx + xdy + (y-z)dz = 0.$$

Es wird also sein

$$\begin{aligned}
P &= z-y, & \left(\frac{dQ}{dz}\right) &= 0, & \left(\frac{dR}{dy}\right) &= 1,\\
Q &= x, & \left(\frac{dR}{dx}\right) &= 0, & \left(\frac{dP}{dz}\right) &= 1,\\
R &= y-z, & \left(\frac{dP}{dy}\right) &= -1, & \left(\frac{dQ}{dx}\right) &= 1,
\end{aligned}$$

woher die endliche das Kriterium enthaltende Gleichung diese werden wird

$$z - x - y = 0 \text{ oder } z = x + y;$$

es werde dieser Wert für z in der Differentialgleichung eingesetzt und es wird werden

$$xdx + xdy - x(dx + dy) = 0;$$

weil diese Gleichung die identische ist, folgt, dass die Differentialgleichung nichts anderes bedeutet außer $z = x + y$.

§326 Weil wir weiter gesagt haben, dass alle Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen drei Variablen enthalten sind, in dieser Form enthalten sind

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

wird hier Zweifel über die Gleichungen aufkommen können, in denen die ersten Differentiale zwei oder mehr Dimensionen festlegen, von welcher Art diese ist

$$Pdx^2 + Qdy^2 + Rdz^2 = 2Sdxdy + 2Tdxdz + 2Vdydz.$$

Aber über Gleichungen von dieser Art ist anzumerken, dass sie auf keine Weise reell sein können, wenn sie keine Teiler der ersten Form haben, die deshalb einfache Gleichungen festlegen werden. Weil nämlich aus dieser Gleichung wird

$$dz = \frac{Tdx + Vdy \pm \sqrt{dx^2\,(T^2 - PR) + 2dxdy\,(TV + RS) + dy^2\,(V^2 - QR)}}{R},$$

wird es leicht klar, dass z einer gewissen Funktion von x und y oder dz einem Ausdruck von dieser Art $pdx + qdy$ nur gleich werden kann, wenn die irrationale Größe rational wird, was passieren wird, wenn war

$$\left(T^2 - PR\right)\left(V^2 - QR\right) = (TV + RS)^2$$

oder

$$R = \frac{PVV + 2STV + QTT}{PQ - SS}.$$

Wenn also diese endliche Gleichung selbst nicht der vorgelegten Gleichung genügt, wird diese imaginär sein.

§327 Es wäre also übrig, dass wir in diesem Kapitel auch Differentialgleichungen höherer Ordnungen, die drei Variablen umfassen, gründlicher betraten und die Fälle bestimmen würden, in denen sie entweder reell oder imaginär werden; aber weil diese Kriterien also verworren werden würden, lassen wir diese Arbeit hier aus, besonders weil sie aus denselben Quellen folgen, welche wir hier eröffnet haben. Im Übrigen, wenn im Integralkalkül diese Kriterien von Nöten sein werden, dann werden sie leicht gefunden werden können. Desselben Grundes wegen wollen wir hier auch Gleichungen, die mehrere Variablen umfassen, nicht betrachten, weil sie fast nie auftauchen, und wenn sie jemals auftauchen würden, aus den hier angegebenen Prinzipien ohne Mühe ausfindig gemacht werden könnten. Daher wollen wir die Darstellung der Grundlagen des Differentialkalküls hier abschließen und werden nun dazu fortschreiten, die hervorstechenden Anwendung zu zeigen, welche dieses Kalkül sowohl in der Analysis selbst als auch in der höheren Geometrie mit sich bringt.